

$$1. \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-3 & 3y+1 \\ -5z+1 & -2w-5 \end{bmatrix} \quad \text{Theta}$$

(b)

$$\begin{array}{l} 2x-3=2 \\ 2x=5 \\ x=2.5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3y+1=-8 \\ 3y=-9 \\ y=-3 \end{array} \quad \begin{array}{l} -5z+1=6 \\ -5z=5 \\ z=-1 \end{array} \quad \begin{array}{l} -2w-5=-7 \\ -2w=-2 \\ w=1 \end{array}$$

(c)

$$2. \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -8 & 3 \\ 13 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 & 5 \\ 4 & -4 \\ 9 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ -4 & -1 \\ 22 & 15 \end{bmatrix}$$

(a)

$$3. \begin{bmatrix} 10 & 7 & 3 \\ -5 & 2 & -11 \\ 6 & -5 & 8 \\ 4 & 1 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 4 & -7 \\ -6 & -9 & 4 \\ 7 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 10 \\ 1 & 11 & -15 \\ -1 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 26 \end{bmatrix}$$

4.

$$\begin{bmatrix} 3x+y & x-2y & 2x \\ 2x-5y & 3x-2y & x+y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x & -3y & 5x+y \\ 3x+2y & x-4y & 2x \end{bmatrix} =$$

(d)

$$\begin{bmatrix} 5x+y & x-5y & 7x+y \\ 5x-3y & 4x-6y & 3x+y \end{bmatrix}$$

Solution Key
Theta - Matrices
MAΘ 2002

$$5. A = \begin{bmatrix} 3 & -11 & -1 \\ -6 & 4 & a \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 8 \\ 2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} 6 & -22 & -2 \\ -12 & 8 & 18 \end{bmatrix} \text{ and } 3B = \begin{bmatrix} 21 & -6 & 24 \\ 6 & -12 & -15 \end{bmatrix}$$

$$2A - 3B = \begin{bmatrix} 6 & -22 & -2 \\ -12 & 8 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 21 & -6 & 24 \\ 6 & -12 & -15 \end{bmatrix}$$

(a)

$$= \begin{bmatrix} -15 & -16 & -26 \\ -18 & 20 & 33 \end{bmatrix}$$

$$6. 3A + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 13 \\ -8 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(e)

$$3A = \begin{bmatrix} 6 & 13 \\ -8 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & 15 \\ -12 & 9 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2

$$7. \quad 4 \begin{bmatrix} x & y \\ z & -1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} y & z \\ -x & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 & x \\ 5 & -x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4x & 4y \\ 4z & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2z \\ -2x & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 2x \\ 10 & -2x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4x & 4y \\ 4z & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y+8 & 2z+2x \\ -2x+10 & 2-2x \end{bmatrix}$$

(c)

$$2-2x = -4$$

$$-2x = -6$$

$$x = 3$$

$$-2x+10 = 4z$$

$$-2(3)+10 = 4z$$

$$-6+10 = 4z$$

$$4 = 4z$$

$$1 = z$$

$$2z+2x = 4y$$

$$2(1)+2(3) = 4y$$

$$2+6 = 4y$$

$$8 = 4y$$

$$2 = y$$

8.
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -21 & 15 \\ 8 & -23 & 19 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

9.
$$\begin{bmatrix} 2 & x & 3 \\ -1 & 2 & 7 \\ z & 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & y \end{bmatrix} =$$

d
$$\begin{bmatrix} 12+3x & 2-3x & 10-x+3y \\ 17 & -7 & -7+7y \\ 3z+11 & z-15 & 5z-5-2y \end{bmatrix}$$

10.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

d
trace of $A = \text{tr} A = 1 + (-2) + 3 = 2$

11.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & -1 \end{bmatrix}$$

e
$$\begin{aligned} A^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+2x & 0 \\ 0 & 2x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+2x & 2+4x \\ 2x^2+x & -2x-1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4

$$12. A = \begin{bmatrix} -7 & 11 & 12 \\ 4 & -3 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(c) A^T = \begin{bmatrix} -7 & 4 & 6 \\ 11 & -3 & -1 \\ 12 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$13. \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 2a \\ 3a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 2b \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ 2a \\ 3a+2b \end{bmatrix}$$

$$4 = 2a$$

$$2 = a$$

$$1 = a+b$$

$$1 = 2+b$$

$$-1 = b$$

$$14. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{\text{odd}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(a) A^{\text{even}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{101} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$15. A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(e) A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

16. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ x & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2+3x} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -x & 2 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 3 & x \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & x \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 9-2x & 0 \\ 0 & -2x+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$9-2x = 1$$

$$-2x = -8$$

$$x = 4$$

$$18. (2A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{d} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A = \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 0.75 & -0.25 \end{bmatrix}$$

$$19. \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{d} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x = -2$$

$$y = 3$$

$$x - y = -2 - 3 = -5$$

8

$$20. \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1.5 & -1 \\ -1.25 & -2 \end{bmatrix}$$

$$21. \begin{vmatrix} x & 3x \\ -2 & x \end{vmatrix} = 0$$

(b)

$$x^2 + 6x = 0$$

$$x = -6 \text{ or } 0$$

$$22. \begin{vmatrix} x-3 & 2 \\ 4 & x-1 \end{vmatrix} = (x-3)(x-1) - 4(2)$$

(b)

$$= x^2 - 4x + 3 - 8$$

$$= x^2 - 4x - 5$$

$$23. \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -3(23) - 2(-8) + (-22)$$

$$= -69 + 16 - 22$$

$$= -75$$

(b)

$$24. \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= x(8) - y(4) + 1(4)$$

$$= 8x - 4y + 4$$

(a)

$$25. \begin{vmatrix} x-1 & -4 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(x+1) - 8 = 0$$

$$x^2 - 1 - 8 = 0$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x = \pm 3$$

10

(d)

$$26. \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ x & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$8 + 3x = 15 + 4$$

$$(a) \quad 8 + 3x = 19$$

$$3x = 11$$

$$x = \frac{11}{3}$$

27. Theorem: $|cA| = c^n |A|$ where A is an $n \times n$ matrix and c is a scalar

$$(b) \quad |A| = -3$$

$$|2A| = 2^4 |A| = 2^4 (-3) = 16(-3) = -48$$

28.

(d)

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-16}{10} = -1.6$$

//

29. Theorem: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -x \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$|A| = 3 + 2x$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{3 + 2x}$$

30. Theorem: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$ and $B^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 35 & 17 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

Bonus: Sign Pattern for 3×3 Cofactor Matrix

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Matrix of Cofactors of A

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

The adjoint of A = $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

13